CAPITOLO IV

CALCOLO DIFFERENZIALE

1. L'idea di derivata

Questo capitolo ed il successivo costituiscono la parte più tipica, più specifica, dell'analisi. In realtà l'analisi è essenzialmente calcolo differenziale e integrale. L'idea stessa di limite può essere considerata ancillare rispetto a loro.

Occupiamoci quindi di calcolo differenziale. Il primo passo è capire la definizione di derivata. Si potrebbe anche dare subito la definizione e iniziare ad enunciare e dimostrare teoremi su teoremi. Dopotutto, chi è sopravvissuto fin qui non dovrebbe avere soverchi problemi ad assimilare quanto verrebbe proposto. Tuttavia, l'importanza dell'argomento rende opportuna una discussione preliminare.

La prima cosa da mettere in chiaro è che l'idea di derivata appare all'inizio come utile solo "in funzione di". E cioè per poter dare la definizione di retta tangente. In effetti, il calcolo differenziale nasce proprio dal tentativo di trovare la retta tangente a una "generica curva". Volendo essere onesti, vi è anche un'altra importante sorgente da cui si sprigiona l'idea di derivata: è il tentativo di trovare la velocità istantanea di un punto che si muove di moto "arbitrario". Dovendo fare una scelta, privilegerò il primo aspetto: ritornerò in seguito, però, sull'idea di velocità.

Quindi: come definire la retta tangente a una curva? Prima dell'analisi, uno conosce la definizione di retta tangente a una circonferenza, come retta che ha in comune con la circonferenza un solo punto. Ha anche visto qualche problema connesso all'idea di retta tangente alle coniche[1], con l'ausilio della geometria analitica. In questo caso il trucco era: mettere $\Delta = 0$, per avere due radici coincidenti. Parlando francamente, il tutto era ben lontano dall'essere giustificato.

[1] Parabola, ellisse (e quindi anche cerchio) ed iperbole.

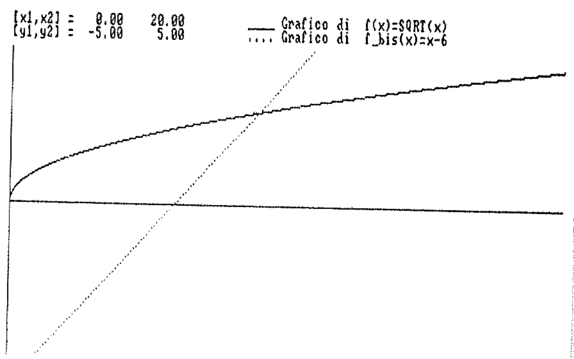
Come piccolo test, chi legge saprebbe rispondere alle seguenti domande?

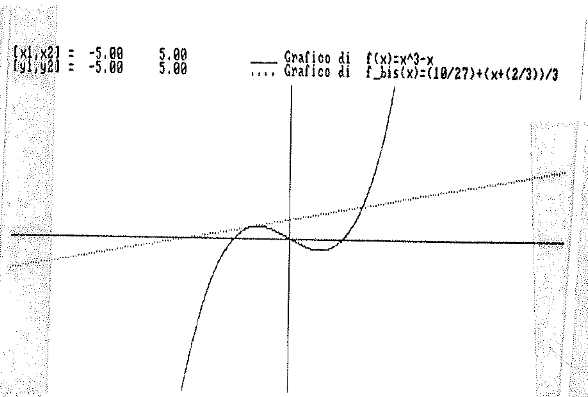
1. Chi garantisce che per un punto (o per quali punti) c'è una (una sola?) retta tangente alla parabola?
2. Perché la retta tangente viene fuori dalla procedura di porre $\Delta = 0$?
3. Due "radici coincidenti" sono per caso due radici distinte "infinitamente vicine"[2]?

Sorvolando sulle lacune esistenti in merito alla giustificazione delle procedure adottate, emerge comunque l'idea di retta tangente ad una curva come retta che ha in comune un punto con quella curva.

Possiamo adottare questa come definizione generale? Ovviamente no.

Ad esempio, $y = x-6$ ha un solo punto in comune con $y = \sqrt{x}$, ed è $x = 9$. Ma non sembra proprio una retta tangente! D'altronde, il disegno a destra mostra una retta che sembra "ragionevolmente tangente" a una curva, eppure ha più di un punto in comune con quella curva.





Non sembra il caso di insistere con il fatto di avere un solo punto in comune. Sarebbe meglio utilizzare un'altra idea, che oltretutto sembra fatta apposta per essere tradotta in termini rigorosi nel contesto dell'analisi. E cioè, vedere la retta tangente come "posizione limite" di rette secanti. Come si vede, è presente la parola magica dell'analisi: "limite".

Se proviamo a perseguire quest'idea, ci accorgiamo tuttavia che vi sono delle

---

[2] Se per caso qualcuno è tentato di rispondere sì a questa domanda, è meglio che faccia un po' di ripasso, prima di andare avanti. In particolare si riveda il § I.8.

difficoltà. Cosa vuol dire "posizione limite"? Sembra che dobbiamo fare un limite di rette, ma noi sappiamo fare solo limiti di <u>funzioni</u> (e, come caso particolare, di successioni). E' vero che una retta può essere vista come grafico di una funzione[3], ma il guaio è che qui vogliamo fare il limite non al variare delle x, per così dire, ma al variare delle rette, ovverossia delle funzioni! Tutto quanto abbiamo fatto finora non ci dà nessuna indicazione.

E allora bisogna farsi furbi e cercare di cavarsela lo stesso. Cominciamo con l'osservare una cosa.

Potremmo interessarci di retta tangente a una curva in un punto P_o appartenente alla curva. Questo non è proprio il punto di vista consueto, in quanto nella geometria euclidea il problema che si pone è quello della retta tangente ad una circonferenza passante per un punto esterno ad essa. Comunque, già riuscire a risolvere il problema di trovare la retta tangente a una curva in un suo punto P_o è un bel passo in avanti.

E' davvero un passo avanti decisivo, se scegliamo in modo furbo le rette secanti di cui la retta tangente è la posizione limite. Non è affatto chiaro in generale, quando si immagina la retta tangente come posizione limite di rette secanti, come queste "si muovano" per "avvicinarsi" alla retta tangente. Ebbene, un modo molto semplice per farle "muovere" è di prenderle tutte passanti per P_o. Naturalmente esse passeranno anche per un altro punto P della curva (sennò, che secanti sono?). Allora potremmo tradurre l'idea di "posizione limite" nel fatto che questa "2ª intersezione" con la curva, e cioè P, tenda a P_o.

Purtroppo, non sembra che l'idea di "fissare" il punto P_o e di fare "muovere il punto P verso P_o" ci abbia risolto un granché. In effetti, non sappiamo fare una cosa del tipo " $\lim\limits_{P \to P_o}$ ". E, a dire il vero, se anche lo sapessimo fare, sapremmo cosa sostituire ai puntini nella frase "il limite per P che tende a P_o di ..."?

Ma, allora, siamo ancora al punto di partenza?

Neanche per idea.

Tanto per cominciare, abbiamo che tutte le rette che stiamo considerando passano per il punto P_o e quindi sono univocamente determinate dal loro coefficiente angolare. Quindi potremmo mettere il coefficiente angolare al posto dei "puntini". Cioè, fare il "limite per P che tende a P_o del coefficiente angola-

---

[3] A parte un caso scalognato.

re della retta passante per P e P_o ". La "retta limite" quindi sarebbe semplicemente la retta passante per il punto P_o il cui coefficiente angolare ha il valore limite.

Resta ancora la questione del limite per $P \longrightarrow P_o$. Anche questa riusciamo a sistemarla, se solo riduciamo un po' le nostre ambizioni. Noi infatti ci siamo posti il problema della retta tangente ad una generica curva. Il guaio è che non sappiamo neanche cos'è una curva. Nel senso che non abbiamo una definizione di carattere generale di una curva. Potremmo magari cercare di darla. Ma possiamo anche accontentarci per ora di curve particolari. E cioè: grafici di funzioni. Così facendo, abbiamo una chiara definizione dell'oggetto di cui stiamo cercando la retta tangente. Ma non è solo questo il vantaggio che ci offre l'occuparci di grafici di funzioni!

Infatti, trattandosi di grafici di funzioni, abbiamo che un punto del grafico è univocamente individuato dalla sua ascissa. Quindi, anche fare il limite per $P = (x,f(x))$ che tende a $P_o = (x_o,f(x_o))$ lo potremmo tradurre con il fare il limite per x che tende a x_o[4].

Quindi, se vogliamo trovare la retta tangente al grafico di una funzione f in un punto di ascissa x_o , dobbiamo fare $\lim\limits_{x \to x_o} m(x)$. Dove $m(x)$ è il coefficiente angolare della retta passante per $(x_o,f(x_o))$ ed $(x,f(x))$. Vale a dire, dalla ben nota formula di geometria analitica, $m(x) = \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$. Quindi dobbiamo fare $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$. Questo limite (se ci sarà, s'intende) ci darà il coefficiente angolare della retta tangente ad f nel punto $(x_o,f(x_o))$.

Sembra proprio che siamo riusciti a capire come dare una risposta rigorosa e rispettosa dell'intuizione al problema della retta tangente a una curva (o, almeno, alle curve che sono grafici di funzioni). Si tratta ora di sistemare per bene le cose dal punto di vista formale.

<u>Definizione 1</u> Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_o \in A$, x_o punto di accumulazione per A . Se $\exists \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \ell \in \mathbb{R}$, diremo che f è derivabile in x_o , e chiameremo ℓ "derivata di f in x_o ", denotandolo con $f'(x_o)$.□

[4] In realtà ci sarebbero delle obiezioni da fare, ma per non appesantire troppo la discussione e per stimolare la curiosità e lo spirito critico di chi legge, le rimando a un momento più opportuno (vedasi il prossimo paragrafo, nella discussione che segue l'esempio 2.1).

<u>Osservazione 1</u> Nella definizione sono presenti due richieste, ovvie, su x_o : deve appartenere ad A , sennò non possiamo calcolare $f(x_o)$; deve essere di accumulazione per A , sennò non possiamo fare il limite.□

<u>Osservazione 2</u> Si richiede che il limite esista e <u>sia reale</u>. Mentre il requisito dell'esistenza del limite pare scontato da imporre, così non si può dire della richiesta che tale limite sia reale. Perché non accettiamo anche un limite uguale a ∞ ? Per esempio, $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty$, il che sembra conforme all'intuizione che il grafico di $\sqrt[3]{x}$ abbia una retta tangente verticale nell'origine. La ragione per cui scartiamo casi come questo la vedremo tra un po' (vedasi l'esempio 2.1).□

Ora che abbiamo visto come si possa arrivare alla definizione di derivata cercando di sistemare in maniera rigorosa l'idea di retta tangente, vorrei spendere un po' di parole sull'altra sorgente dell'idea di derivata, e cioè il problema della velocità di un punto che si muova di un moto arbitrario.

Più precisamente si tratta di definire la velocità <u>istantanea</u> di un punto come valore limite della velocità media. Per semplicità ci occuperemo di un punto che si muova su una retta. Indicheremo con $x(t)$ il valore dell'ascissa del punto all'istante t . Se ci interessa la velocità media del punto nell'intervallo tra t_o e t , la sua misura[5] è data da $\frac{x(t)-x(t_o)}{t-t_o}$. E non ci vuole davvero molto a pensare di fare $\lim_{t\to t_o} \frac{x(t)-x(t_o)}{t-t_o}$, definendo il valore di questo limite come velocità istantanea all'istante t_o .

E' abbastanza evidente che questa problematica ci ha condotto molto più direttamente all'idea di derivata di quanto non sia stato per la retta tangente. Avrei anche potuto sorvolare su questa motivazione, visto che non dà poi molto di nuovo e interessante. C'è però un aspetto che voglio sottolineare. L'idea di velocità (media o istantanea) è solo un caso particolare di un'idea ben più generale. Si tratta dell'idea di "saggio di variazione" di una grandezza rispetto ad un'altra, cosa che possiamo definire ogni qual volta una grandezza varî in funzione di un'altra. Quindi non c'è solo la velocità (spazio/tempo), ma anche, per esempio:

- calore specifico (calore/temperatura)

---

[5] Supponiamo di avere scelto una unità di misura per il tempo e una per lo spazio.

- baud
- utilità marginale ("soddisfazione"/quantità consumata di un dato bene)
- produttività marginale del lavoro (quantità prodotta di un certo bene/lavoro erogato)
- inflazione (prezzi/tempo)

2. Definizione di derivata

Comincio a ricordare la definizione, già data.

Definizione 1 Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 punto di accumulazione per A . Se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \mathbb{R}$, diremo che f è derivabile in x_0 , e chiameremo ℓ "derivata di f in x_0 ", denotandolo con $f'(x_0)$.□

Ricordo soltanto che il rapporto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ di solito, per ovvie ragioni, viene chiamato "rapporto incrementale". La notazione $f'(x_0)$ non è l'unica usata: altre sono $\left(\frac{df}{dx}\right)(x_0)$ o $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$ o ancora $Df(x_0)$ e altre ancora.

Visto che la derivata è definita mediante un limite, possiamo anche introdurre facilmente l'idea di derivata sinistra e destra. Naturalmente, avremo bisogno di richiedere qualcosa di più ad x_0 , e cioè di essere punto di accumulazione da sinistra o da destra rispettivamente.

Definizione 2 Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 punto di accumulazione da sinistra (rispettivamente: da destra) per A . Se $\exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \mathbb{R}$ (rispettivamente: $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \mathbb{R}$), diremo che f è derivabile in x_0 da sinistra (rispettivamente: da destra), e chiameremo ℓ "derivata sinistra (rispettivamente: destra) di f in x_0 ", denotandolo con $f'_-(x_0)$ (rispettivamente: $f'_+(x_0)$).□

Va da sé che, qualora x_0 sia punto di accumulazione per f sia da sinistra che da destra (quindi, in particolare, se x_0 è punto interno ad A), l'essere derivabile per f è equivalente alla esistenza ed uguaglianza delle derivate destre e sinistre. Ricordo che si può, infatti, dimostrare facilmente il seguente teorema (che avrebbe dovuto trovarsi nel terzo capitolo, ma mi son dimenticato...):

Teorema 1 Sia $g: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 di accumulazione da sinistra e da destra per A . Allora:

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) \Leftrightarrow \left(\exists \lim_{x \to x_0^-} g(x) \text{ , } \exists \lim_{x \to x_0^+} g(x) \text{ e } \lim_{x \to x_0^-} g(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) \right)$$

Inoltre, se $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$ (oppure $+\infty$, $-\infty$, ∞), anche i due limiti da sinistra e da destra sono uguali ad ℓ (oppure $+\infty$, $-\infty$, ∞), e viceversa.□

Dimostrazione Ovvia conseguenza delle definizioni.□

Definizione 3 Diremo che f è derivabile in $B \subseteq A$ se è derivabile in ogni $x_0 \in B$.□

Sia data $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Prendiamo l'insieme dei punti in cui f è derivabile e chiamiamolo A_1 . Se ad ogni punto $x \in A_1$ associamo il numero reale $f'(x)$, otteniamo una nuova funzione reale di variabile reale, definita su A_1 , che potremmo indicare con f' e che chiameremo funzione derivata prima di f . Abbiamo quindi $f':A_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, una nuova funzione reale di variabile reale.

Il primo risultato da provare, particolarmente significativo, è che la derivabilità in un punto x_0 implica la continuità.

Teorema 2 Sia $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 di accumulazione per A . Se f è derivabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .□

Dimostrazione Abbiamo che $\exists$ $\ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$. Poiché $\lim_{x\to x_0} (x-x_0) = 0$, dal teorema sul limite di un prodotto, segue che $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0) = 0$, cioè $\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = 0$. Cioè $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. E quindi f è continua in x_0 .□

Ora che abbiamo a disposizione questo risultato, possiamo capire perché nella definizione di derivata si pretende che il limite del rapporto incrementale sia finito. Come già notato, tenendo conto dell'interpretazione geometrica, poteva sembrare invece più sensato accettare anche il caso in cui il limite era ∞ (o, magari, almeno il caso in cui il limite era $+\infty$ o $-\infty$). In effetti, l'esempio fornito nell'osservazione 1.2 sembrava portare buone ragioni per fare così. Non è però l'unico esempio che si possa fare.

Esempio 1 Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$. E' $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e analogamente $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$. Quindi $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$. Si noti però che f non è continua in 0 .□

Mi pare che l'insegnamento offerto dall'esempio 1 sia chiaro. Se vogliamo riuscire a dimostrare un risultato come il teorema 1, non possiamo accettare come derivata una funzione per la quale il limite del rapporto incrementale sia ∞ .

Con ciò, sia chiaro, non intendo dire che l'accettare una "derivata infinita" in un punto sia contro l'intuizione che abbiamo di retta tangente. Da questo punto di vista l'esempio 1 non è così dirimente. Infatti, tutto sommato, la posizione limite delle rette secanti è proprio l'asse delle y (farsi un disegnino!), cioè una retta verticale, a cui rimanda l'immaginazione nel caso di una "pendenza" infinita. Uno però può restare interdetto da una situazione come questa, in cui il grafico di f offre l'esempio di una "curva spezzata in varî pezzi": non è scontato che in una situazione come questa la nostra intuizione accetti di parlare di "retta tangente" in un punto quale è $(0,0)$ che è "staccato" dal resto della curva.

Quindi, si tratta di fare una scelta tra due posizioni. Una è quella di insistere sull'idea di retta tangente come posizione limite di rette secanti, nonostante qualche perplessità creata da esempi come quello appena visto. L'altra è di privilegiare la validità del teorema 1, tenendo anche conto del fatto che volere mantenere come derivabile una funzione il cui limite del rapporto incrementale sia ∞ non dà comunque piena soddisfazione all'intuizione. E' evidente che ho scelto la seconda posizione (non è una scelta personale, è la scelta che viene sempre fatta in analisi, in quanto vi sono molte altre ragioni che inducono a privilegiare questa scelte rispetto all'altra).

Approfitto dell'esempio 1 anche per sistemare una questione lasciata aperta nel paragrafo precedente.

In effetti, come mostra l'esempio 1, <u>non</u> <u>è</u> <u>affatto</u> <u>vero</u> che $x \longrightarrow x_o$ garantisca $P \longrightarrow P_o$ (sto ragionando in termini grafico-intuitivi, evidentemente, visto che non abbiamo nessuna definizione per $P \longrightarrow P_o$).

Il viceversa è vero: la distanza tra x ed x_o è minore o uguale della distanza tra P e P_o (la lunghezza di un cateto è minore o uguale di quella dell'ipotenusa), pertanto la convergenza di P a P_o dovrebbe sensatamente garantire la convergenza di x a x_o . Nella precedente frase è già contenuta un'idea illuminante su quando sia vero che $x \longrightarrow x_o$ garantisce $P \longrightarrow P_o$. Il teorema di Pitagora ci dice che la distanza tra P e P_o è pari a $\sqrt{(x-x_o)^2+(f(x)-f(x_o))^2}$. Quindi, se $x \longrightarrow x_o$ <u>ed</u> <u>f</u> <u>è</u> <u>continua</u>, si ha $f(x) \longrightarrow f(x_o)$ e quindi anche $P \longrightarrow P_o$ (ribadisco: sto sempre parlando in termini intuitivi). Morale: il passaggio "salvifico" che avevamo fatto a pagina 4 da $P \longrightarrow P_o$ ad $x \longrightarrow x_o$, per stare in piedi richiede qualche condizione extra. Una condizione che "funziona" è proprio la continuità di f in x_o. Ma allora il discorso fatto a suo tempo nel § 1 per formalizzare l'idea di derivata era legato alla continuità della funzione. Pertanto la validità del teorema 1 è preziosa per conservare una migliore assonanza tra definizione rigorosa e considerazioni intuitive. E da qui ecco quindi un'altra ragione "a favore" del restringere l'idea di derivabilità al caso in cui il limite del rapporto incrementale sia reale.

Poiché sono fermamente convinto che un atteggiamento critico sia essenziale in ogni circostanza, vorrei presentare anche un esempio il quale mostra come non tutte le cose sono limpide come sembrerebbe.

Esempio 2 Sia $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Si noti che f è derivabile (e quindi anche continua) in 0. □

Dettaglio E' $0 \leq f(x) \leq x^2 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$, quindi, per $x > 0$, $0 \leq \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq \dfrac{x^2-0}{x-0}$ e pertanto per il teorema dei due carabinieri $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Analogamente $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Quindi f è derivabile in 0 con derivata uguale a zero. E pertanto f è anche continua. □

Il grafico di f è fatto di punti sparpagliati sull'asse x (quelli di ascissa irrazionale) e sulla parabola di equazione $y = x^2$ (con ascissa razionale). Chi legge ritiene questo esempio conforme all'intuizione di funzione continua o derivabile?

E' anche possibile fare un esempio di funzione che è continua su tutto un intervallo $[a,b]$ senza essere derivabile in alcun punto. Si tratta di un famoso esempio, dovuto a Weierstrass: esso contrasta piuttosto severamente in particolare con la nostra idea intuitiva di continuità.

3. Compatibilità tra la derivata e le operazioni

Per l'enunciato e la dimostrazione dei teoremi relativi alla derivabilità di una somma, prodotto, etc, rinvio a C-S. Dò solo un esempio di come si possano adattare gli enunciati dei teoremi al contesto nel quale ho dato la definizione di derivata.

Teorema 1 Siano $f,g: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 di accumulazione per A . Se f e g sono derivabili in x_0 , allora $f+g$ è derivabile anch'essa in x_0 e si ha: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.□

Vorrei far notare che la tesi del teorema ha una struttura tipica di questo tipo di teoremi relativi alla derivata. Cioè si compone di due parti. La prima afferma che la derivata della somma c'è, la seconda permette di trovarne il valore a partire dal valore delle derivate delle funzioni addende.

4. Compatibilità tra la derivata e la relazione d'ordine

Se sappiamo che $f \leq g$, cioè se abbiamo due funzioni $f,g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ e sappiamo che $f(x) \leq g(x) \quad \forall\ x \in A$, non possiamo dire nulla rispetto alle loro derivate.

Ad esempio, se c'è la derivata di f in un $x_0 \in A$, non è detto che ci sia quella di g in x_0 . E, nel caso in cui ci sia, non è detto che sia $f'(x_0) \leq g'(x_0)$.

Invito il lettore a fare degli esempi per convincersi della giustezza di quanto affermato, e a chiedersi come mai ci sono questi "guai".

In realtà, come mi auguro che il lettore abbia dedotto dagli esempi che certamente avrà avuto cura di fare, non è questo il punto di vista "giusto" per guardare ai rapporti tra derivata e "≤" . Vedremo dopo, nel § 7, quale è l'angolo visuale migliore.

5. Differenziabilità

Supponiamo di avere una funzione f, magari un pò difficile da calcolare. Possiamo utilizzare "al suo posto" un'altra funzione g, più facile da calcolare? O, per lo meno, possiamo fare questo "vicino" ad un certo punto x_o ? Questo ci porta a focalizzare l'attenzione sull'incremento di f : non è troppo difficile da notare che $f(x) = f(x_o)+(f(x)-f(x_o))$. Quindi, se conosciamo $f(x_o)$ (o, almeno, una sua ragionevole approssimazione), possiamo pensare di "sostituire" all'incremento $f(x)-f(x_o)$ qualche altra espressione più facile da calcolare.

Per esempio, potremmo pensare di approssimare l'incremento $f(x)-f(x_o)$ con qualcosa del tipo $k\cdot(x-x_o)$, dove $k\in\mathbb{R}$ è una costante da individuare in qualche modo per ottenere una buona approssimazione (magari si può anche pensare di trovare k t.c. la approssimazione sia la "migliore possibile"). Per essere un po' più "concreti", si può guardare al disegno di un grafico con annessa retta tangente nel punto $(x_o,f(x_o))$. Basta poco per convincersi che $k = f'(x_o)$ sembra proprio essere la scelta migliore. In effetti, tra tutte le rette passanti per $(x_o,f(x_o))$, la retta di coefficiente angolare $f'(x_o)$ è quella che più resta "attaccata" al grafico di f vicino ad x_o . Ovverossia, visto altrimenti, la migliore approssimazione che possiamo fare per $f(x)-f(x_o)$ è data da $f'(x_o)\cdot(x-x_o)$.

Abbiamo già colto i due elementi essenziali di questo paragrafo. Il primo è l'idea di sostituire all'incremento di f qualcosa di più semplice (in particolare: un polinomio di 1° grado nella variabile $x-x_o$). Il secondo è la connessione presente tra differenziabilità e derivabilità.

Definizione 1 (di differenziabilità) Sia $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}$, $x_o\in A$, x_o di accumulazione per A . Diciamo che f è differenziabile in x_o se $\exists$ $k\in\mathbb{R}$ ed $\exists$ $\omega:A \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.:

$$(\star)\quad \begin{cases} f(x)-f(x_o) = k\cdot(x-x_o)+\omega(x)\cdot(x-x_o) \\ \lim\limits_{x\to x_o} \omega(x) = 0 \\ \omega(x_o) = 0 \end{cases} \qquad .\square$$

E' chiaro che la condizione $\omega(x) \longrightarrow 0$ fa sì che l'addendo $\omega(x)\cdot(x-x_o)$ tenda a zero "più rapidamente" dell'altro addendo. La condizione $\omega(x_o) = 0$ è chiaramente superflua: qualsiasi sia il valore che essa assume in x_o è irrilevante, visto che il valore di ω non influenza la prima uguaglianza ($\omega(x_0)$ è moltiplicato per x_0-x_0 , cioè per zero) e ancor meno la richiesta sul limite di ω . Quindi serve solo per poter dire che ω è continua in x_0 , cosa che non ci interessa minimamente. Ma conviene porre la condizione $\omega(x_0) = 0$ in (☆), perché essa risulta essere comoda (non può essere indispensabile, visto che è irrilevante!): per esempio, la dimostrazione del teorema 47.6 del C-S non funziona, così com'è, senza la condizione $\omega(x_0) = 0$. Senza questa condizione si può fare un'altra dimostrazione, che però è più complicata.

Come già anticipato, vi è una connessione tra derivabilità e differenziabilità. In effetti, sono due concetti tra di loro equivalenti.

<u>Teorema 1</u> Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 di accumulazione per A . Si ha che f è derivabile in x_0 se e solo se è differenziabile in x_0 .□

<u>Dimostrazione</u>

"$\Rightarrow$" Sia $k = f'(x_0)$ e $\omega(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & \text{se } x \neq x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0 \end{cases}$.

E' evidente che la condizione (☆) è soddisfatta: per la prima uguaglianza, basta sostituire e si ha che

$$k\cdot(x-x_0)+\omega(x)\cdot(x-x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)\cdot(x-x_0) = f(x)-f(x_0)$$

se $x \neq x_0$ (se $x = x_0$, la prima uguaglianza di (☆) è automaticamente soddisfatta, indipendentemente dalla scelta fatta per k e ω). E' inoltre

$$\lim_{x\to x_0} \omega(x) = \lim_{x\to x_0} \left(f'(x_0)-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = f'(x_0)-\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$

"$\Leftarrow$" Dalla prima uguaglianza di (☆) otteniamo, per $x \neq x_0$: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$ $= k+\omega(x)$. Da cui $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = k$ (perché $\lim\limits_{x\to x_0} \omega(x) = 0$). E quindi f è derivabile, essendo $k \in \mathbb{R}$.□

<u>6. Derivata di funzioni inverse e composte</u>

Già sappiamo che se una funzione, definita in un intervallo, è continua e strettamente crescente, allora essa è invertibile. Ci si può chiedere cosa si possa dire della derivabilità. E' evidente che, a livello grafico-intuitivo, possiamo fare riferimento al fatto che l'inversione di una funzione corrisponde all'effettuare una simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante. Sembra più che ragionevole che, se una funzione è derivabile in un certo punto, anche la sua inversa lo sia, naturalmente nel punto corrispondente. Non solo, ma la retta tangente ad f^{-1} in $f(x_o)$ dovrebbe essere la simmetrica della retta tangente in x_o : così almeno appare dal disegno. Ora, se abbiamo una retta con coefficiente angolare k , la sua simmetrica rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ha coefficiente angolare $1/k$.

Esercizio 1 Data una retta di equazione $y = kx+m$, scrivere l'equazione della retta simmetrica ad essa rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.□

E' sperabile che il lettore abbia scorto un problema, e cioè che se il coefficiente angolare k è uguale a zero, allora otteniamo $1/0$, ovverossia non otteniamo nulla. In effetti, la retta simmetrica (sempre rispetto alla bisettrice del I e III quadrante) di una retta orizzontale è una retta verticale. Questo ci fa intuire che, se vogliamo enunciare e dimostrare un preciso risultato, probabilmente dovremo imporre la condizione che sia $f'(x_o) \neq 0$. Detto questo, è più che ragionevole aspettarsi che sia $(f^{-1})'(f(x_o)) = \dfrac{1}{f'(x_o)}$. Se usiamo la variabile y come "variabile indipendente" per la funzione f^{-1} , la formula precedente assuma la forma $(f^{-1})'(y_o) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_o))}$. Infatti, trattandosi di funzioni inverse, abbiamo che $y_o = f(x_o) \Leftrightarrow f^{-1}(y_o) = x_o$. Vorrei far notare che c'è una certa consuetudine ad usare la variabile y come "variabile indipendente" quando si ha a che fare con una funzione inversa. Ma non va dimenticato che f^{-1} è una funzione "come tutte le altre". Pertanto useremo spesso la variabile x quando vorremo indicare il generico punto nel quale calcoliamo f^{-1} e, per analogia, il simbolo x_o per indicare un punto "fissato" (ovverossia, scelto in precedenza). In tal caso la formula diventa: $(f^{-1})'(x_o) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x_o))}$. Quest'ultima è la forma che appare più frequentemente. Vorrei comunque fare un esempio dei tre aspetti, che sono del tutto equivalenti tra loro, assunti dalla formula di derivazione della funzione inversa.

Esempio 1 Sia $f:[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = x^2$. Allora $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, con $f^{-1}:[0.+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Ed abbiamo (ricordo che $f'(x) = 2x$):

$$(f^{-1})'(f(x_o)) = \frac{1}{f'(x_o)} \qquad \text{cioè} \qquad D(\sqrt{\cdot})(f(x_o)) = \frac{1}{2x}$$

$$(f^{-1})'(y_o) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_o))} \qquad \text{cioè} \qquad D(\sqrt{\cdot})(y_o) = \frac{1}{2\sqrt{y_o}}$$

$$(f^{-1})'(x_o) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_o))} \qquad \text{cioè} \qquad D(\sqrt{\cdot})(x_o) = \frac{1}{2\sqrt{x_o}} \quad .\square$$

Come si vede, la formula più utile è l'ultima (in realtà la penultima e l'ultima sono la stessa formula, solo che uso due diversi simboli per indicare il punto cui sono interessato).

Per l'enunciato e la dimostrazione rigorosa di un risultato che riguarda la derivazione della funzione inversa, vedasi C-S.

Passiamo alla derivazione delle funzioni composte. Anche qui, rinvio la parte formale al C-S.

Mi limito a due sole osservazioni.

La prima riguarda la formula: la derivata di una funzione composta è il prodotto delle derivate. Bene, questo fatto è il più naturale che ci si possa aspettare. Supponiamo di avere tre grandezze A,B e C tra loro proporzionali e di usare le lettere x,y e z per indicarne le rispettive misure. Supponiamo che la grandezza B dipenda dalla grandezza A e vari del doppio di quel che varia A : cioè che $y = g(x)$, con $g(x) = 2x+\alpha$ [6] (qui α è una costante il cui valore non ci interessa). Analogamente, supponiamo che la grandezza C a sua volta dipenda dalla grandezza B , variando del triplo: stavolta avremo che $z = f(y)$ con $f(y) = 3y+\beta$. Allora la grandezza C varierà del sestuplo della grandezza A , cioè $z = 6x+\alpha'$ (infatti $z = f(g(x)) = f(2x+\alpha) = 3\cdot(2x+\alpha)+\beta = 6x+(3\alpha+\beta)$: ho indicato con α' la costante $3\alpha+\beta$, il cui valore non mi interessa[7]).

Questo è quel che accade nei caso più semplice, cioè nel caso di grandezze tra loro proporzionali la variazione della funzione composta è proprio il prodotto delle variazioni. Ma allora in casi più complicati, questo è ciò che ci dobbiamo aspettare a livello di derivate!

Perché? Cercherò di spiegarlo.

Ciò che entra in gioco, a dire il vero, è piuttosto l'idea di

[6] Ma il lettore è convinto di questa affermazione?

[7] Per chi non l'avesse ancora capito, il valore di queste costanti non è rilevante perché in questo discorso siamo interessati alle variazioni delle grandezze in esame

differenziabilità anziché quella di derivabilità: sappiamo però che questi due concetti sono equivalenti tra loro per il teorema 5.1. Ricordo che l'idea sottostante alla differenziabilità è quella di sostituire all'incremento di f un incremento approssimato, il più semplice possibile: si tratta proprio dell'incremento proporzionale. Infatti, sostituiamo ad $f(x)-f(x_o)$ un opportuno $k\cdot(x-x_o)$. Quindi è prevedibile che la regola di derivazione delle funzioni composte si possa inferire (a livello intuitivo) da quel che succede nel caso di grandezze che variano in modo proporzionale.

La seconda osservazione riguarda la formula che è $(f\circ g)'(x_o) = f'(g(x_o))\cdot g'(x_o)$, Come nel caso della derivazione della funzione inversa, è importante notare dove vengono calcolate le derivate. In particolare, la derivata di f viene calcolata nel punto $g(x_o)$, non nel punto x_o (che magari non appartiene neanche all'insieme di definizione di g).

7. Monotonia di f e segno di f'

Questo paragrafo recupera l'apparente sconnessione tra derivate e $\leq$, vista al § 4, dove sembrava che le cose non andassero granché bene. In realtà, avevamo guardato le cose da un punto di vista sbagliato. D'altronde, che qualche connessione vi possa essere tra derivata e $\leq$ è ragionevole per le seguenti considerazioni di carattere puramente formale:
- la derivata è definita come un limite
- c'è il teorema di permanenza del segno per i limiti.

Se teniamo conto di ciò, si capisce che dobbiamo concentrare l'attenzione sulla funzione di cui facciamo il limite. Tale funzione è il rapporto incrementale: quindi possiamo immediatamente dedurre che, se il rapporto incrementale è maggiore o uguale a zero, allora anche la derivata lo è (e abbiamo anche una sorta di viceversa, in cui intervengono le disuguaglianze strette, sempre per il teorema di permanenza del segno). Ma cosa vuol dire che il rapporto incrementale è maggiore o uguale di zero? E' una proprietà significativa? Perbacco se lo è! $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ significa che:
- quando $x > x_0$, allora $f(x) \geq f(x_0)$
- quando $x < x_0$, allora $f(x) \leq f(x_0)$.

Come si vede, assomiglia parecchio al fatto che f sia debolmente crescente! Se così è, il segno del rapporto incrementale ha a che fare con una importante proprietà delle funzioni. Proviamo allora a formalizzare il tutto:

<u>Teorema 1</u> Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 punto di accumulazione per A. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Se f è debolmente crescente (rispettivamente: decrescente) su A, allora $f'(x_0) \geq 0$ (rispettivamente: $f'(x_0) \leq 0$).□

<u>Dimostrazione</u> Naturalmente vediamo solo un caso. Se f è debolmente crescente, allora $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \forall\, x \in A \setminus \{x_0\}$. E quindi, per il teorema di permanenza del segno, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Cioè, $f'(x_0) \geq 0$.□

<u>Osservazione 1</u> Evidentemente basta che esista $\delta > 0$ t.c. f sia monotona su $A \cap \,]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Se f soddisfa una tale proprietà, si usa dire che f è localmente monotona in x_0.□

<u>Osservazione</u> <u>2</u> Come è ben noto, "al limite le disuguaglianze si indeboliscono". Pertanto, se anche f fosse strettamente crescente, non potremmo dedurre che $f'(x_o) > 0$. Come esempio si prenda $f(x) = x^3$ ed $x_o = 0$.□

Abbiamo quindi visto come usare il teorema di permanenza del segno per ricavare, dalla monotonia di f , informazioni sul segno di $f'(x_o)$. Come il lettore ben sa, in realtà quello usato non è propriamente il teorema di permanenza del segno, bensì il suo rovescio. Il teorema "diretto" di permanenza del segno offre informazioni sul segno di una funzione dalla conoscenza del segno del suo limite. Vedi per esempio il teorema 33.8 di C-S oppure, nel contesto delle successioni, il teorema II.9.1 e corollario II.9.2 delle dispense.

<u>Teorema</u> <u>2</u> Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_o \in A$, x_o punto di accumulazione per A . Supponiamo che f sia derivabile in x_o . Se $f'(x_o) > 0$ (rispettivamente: < 0), allora $\exists\ \delta > 0$ t.c. $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} > 0$ (rispettivamente: < 0) per ogni $x \in (A \cap]x_o-\delta, x_o+\delta[) \setminus \{x_o\}$.□

<u>Dimostrazione</u> E' una conseguenza immediata del teorema di permanenza del segno (applicato alla funzione "rapporto incrementale", cioè alla funzione $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$).□

Credo che ad un attento lettore l'enunciato del teorema 2 sia apparso un po' <u>deludente</u>. In effetti, la tesi del teorema non parla di monotonia. Certo solo un ingenuo potrebbe aspettarsi una tesi in cui si afferma che f è monotona su A , visto che il limite è una proprietà locale (vedi § III.6). Però almeno la locale monotonia in x_o (vedi osservazione 1), uno se la poteva anche ragionevolmente aspettare. Cioè, si poteva immaginare che fosse possibile dimostrare il seguente:

"<u>Teorema</u>" Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_o \in A$, x_o punto di accumulazione per A . Supponiamo che f sia derivabile in x_o . Se $f'(x_o) > 0$ (rispettivamente: < 0), allora $\exists\ \delta > 0$ t.c. f è strettamente crescente (rispettivamente: strettamente decrescente) su $A \cap]x_o-\delta, x_o+\delta[$.□

Ebbene, contrariamente alle attese e all'intuizione, <u>così</u> <u>non</u> <u>è</u>. Il teorema tra virgolette sopra riportato è <u>falso</u>. Evidentemente, se dico questo, ci sarà un esempio di funzione che soddisfa le ipotesi del "teorema" ma non la sua tesi. Vedremo in un prossimo paragrafo un tale esempio. Per ora, quel che è più importante capire è cosa esattamente dice il teorema 2 e <u>perché</u> <u>non</u> <u>dice</u> che f è localmente monotona in x_o . La tesi del teorema è che (vediamo il caso $f'(x_o) > 0$):

(☆) $\exists\ \delta > 0$ t.c. $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} > 0 \quad \forall\ x \in (A \cap]x_o-\delta, x_o+\delta[) \setminus \{x_o\}$.

Se f fosse strettamente crescente su $A \cap]x_o-\delta, x_o+\delta[$, si avrebbe:

(★) $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0 \quad \forall\ x_1, x_2 \in A \cap]x_o-\delta, x_o+\delta[$ e t.c. $x_1 \neq x_2$.

Dovrebbe essere evidente che l'affermazione (★) è più forte di (☆). Infatti, basta prendere $x_1 = x_o$ e $x_2 = x$ in (★) per ottenere (☆). Ma il viceversa non funziona. Nessun problema ad usare la variabile x_2 al posto di x , ma x_o è un dato, quindi non lo posso sostituire a mio piacimento con un punto $x_1 \in A \cap]x_o-\delta, x_o+\delta[$!

Quindi la tesi del teorema 2 non è la locale stretta crescenza. Si tratta di una proprietà che soltanto sembra che abbia a che fare con la stretta crescenza, in quanto ci dice che $f(x) > f(x_o)$ se $x > x_o$ e $f(x) < f(x_o)$ se $x < x_o$. Tanto è vero che nel C-S la proprietà espressa dalla tesi del teorema 2 viene chiamata "crescenza nel punto x_o "[8].

Ma, allora, continuano ad esserci dei guai nel rapporto tra derivata e $\leq$? Vedremo in seguito come rimediare a questo problema. Avremo però bisogno nientedimeno che del teorema fondamentale del calcolo differenziale, vale a dire il teorema di Lagrange.

Per ora, dobbiamo accontentarci di questi risultati. I quali, ad onor del vero, non sono proprio da buttare via.

8. Massimi e minimi locali

Chi abbia visto un po' di analisi nelle scuole secondarie, solitamente ritiene di sapersela cavare a proposito dei massimi e minimi relativi per una funzione. La terminologia usata nel titolo di questo paragrafo si riferisce proprio ai minimi e massimi relativi. Non uso la terminologia più consueta per due motivi. Il primo è che preferisco uniformarmi all'uso del tutto generale in matematica dell'attributo "locale". Il secondo motivo è di carattere didattico: usando l'aggettivo "locale" spero di attirare l'attenzione dello studente "già esperto di

[8] Si tratta di una terminologia curiosa, in quanto la crescenza è una proprietà di una funzione su un insieme. Si tratta in effetti di una terminologia inventata ad hoc per "dare un nome" alla tesi del teorema 2. Non va confusa con la crescenza locale in x_o .

analisi" su questo paragrafo. Altrimenti, potrebbe avere la tentazione di leggerlo superficialmente, senza quindi accorgersi che magari <u>non</u> <u>sa</u> cosa vuol dire massimo o minimo relativo[9].

<u>Definizione 1</u> Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_o \in A$. Il punto x_o si dice punto di minimo (rispettivamente: massimo) locale se $\exists\ \delta > 0$ t.c. x_o sia punto di minimo (rispettivamente: massimo) per $f_{|A \cap]x_o-\delta, x_o+\delta[}$.□

Cioè, il punto x_o è un punto di minimo per f ristretta ad un certo intorno di x_o . Per distinguere senza equivoci i due concetti, si usa la contrapposizione locale/globale od anche quella relativo/assoluto. In formule, x_o è punto di minimo (globale) per f se $f(x) \geq f(x_o)$ $\forall\ x \in A$; è invece punto di minimo locale per f se $f(x) \geq f(x_o)$ $\forall\ x \in A \cap]x_o-\delta, x_o+\delta[$. Volendo, possiamo quindi riscrivere la definizione 1 così:

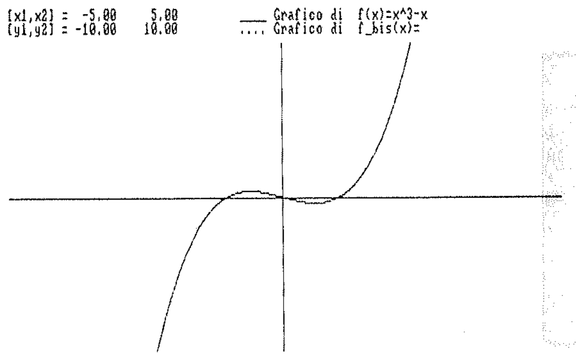
<u>Definizione 1</u> Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_o \in A$. Il punto x_o si dice punto di minimo (rispettivamente: massimo) locale se $\exists\ \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq f(x_o)$ (rispettivamente: $f(x) \leq f(x_o)$) $\forall\ x \in A \cap]x_o-\delta, x_o+\delta[$.□

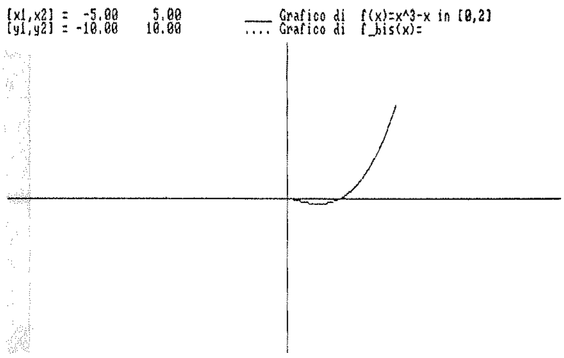
<u>Osservazione 1</u> Per amor di sinteticità si usa dire che x_o è un punto di estremo locale (rispettivamente: globale) se è un punto di massimo o di minimo locale (rispettivaente: globale).□

Quindi, evidentemente, un punto di minimo globale è anche un punto di minimo locale. Il viceversa non è garantito.

L'idea di punto di minimo locale può anche essere colta graficamente. Significa che ci disinteressiamo di quel che succede fuori dalla striscia $]x_o-\delta, x_o+\delta[\times\mathbb{R}$: vedasi la figura sotto a sinistra che mostra il grafico di f e la figura sotto a destra che mostra il grafico di f ristretta a $A \cap]x_o-\delta, x_o+\delta[=]0,2[$. In questo esempio, il punto $x_o = 1$ è un punto di minimo locale ma non globale.

[9] Parlo per esperienza...





Chi ha un po' di esperienza di analisi, magari non conosce la definizione 1 o l'ha dimenticata, ma di certo si ricorda che "gli estremi locali (pardon: relativi) si trovano imponendo la condizione $f'(x_0) = 0$ ". Il che spiega, per il novizio dell'analisi, come mai ci si interessa di questi strani punti nel capitolo dedicato alle derivate. In realtà, l'affermazione riportata tra virgolette è solo parzialmente vera[10]. Cerchiamo comunque di capire dove sia il legame tra minimi locali e derivata, provando a dimostrare che in un punto di minimo locale la derivata prima si annulla. Per ora, ometterò i dettagli (importanti!) perché mi interessa di più cogliere l'idea principale.

Se x_0 è punto di minimo relativo, allora $f(x)-f(x_0) \geq 0$ per x vicini ad x_0 . Ma allora, $x > x_0$ implica $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ e quindi (facendo il limite per $x \longrightarrow x_0^+$) $f'_+(x_0) \geq 0$; invece $x < x_0$ implica $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ e quindi $f'_-(x_0) \leq 0$. Orbene, se f è derivabile in x_0 , allora abbiamo $f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0)$. E quindi $0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$, cioè $f'(x_0) = 0$. Restano, come dicevo, i dettagli da sistemare, cosa che vedremo nella dimostrazione vera e propria. Insisto sul fatto che questi cosiddetti dettagli sono <u>molto</u> importanti, perché dalla loro incomprensione seguono molti degli errori tipici che si fanno in questo contesto.

<u>Teorema 1</u> Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 punto di accumulazione per A da sinistra e da destra. Se x_0 è punto di minimo (rispettivamente: massimo) locale per f e se f è derivabile in x_0 , allora è $f'(x_0) = 0$.□

<u>Dimostrazione</u> Vediamo il caso in cui x_0 sia punto di massimo locale. Sia quindi $\delta > 0$ t.c. $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall\ x \in A \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Allora:

(*) $\forall\ x \in A \cap]x_0, x_0+\delta[\ , \quad \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$

[10] Il che significa, in matematica, che è falsa. Non esistono sfumature o mezze misure. Per lo meno, non ai bassi livelli del discorso ai quali ci stiamo muovendo.

(**) $\forall\ x \in A \cap]x_0-\delta, x_0[\ ,\ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.

Poiché f è derivabile in x_0 , ed x_0 è di accumulazione sia da destra che da sinistra, allora $\exists\ f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ e sono uguali a $f'(x_0)$ (teorema 2.1).

Ma da (*) otteniamo, per la permanenza del segno, che $\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0) \leq 0$. Da (**) si ha $f'_-(x_0) \geq 0$. Ma allora $0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$, e quindi $f'(x_0) = 0$.□

Il dettaglio importante consiste nella richiesta che x_0 sia di accumulazione da destra e da sinistra. Senza questa ipotesi, il teorema non è vero: <u>non basta</u> che x_0 sia di accumulazione soltanto.

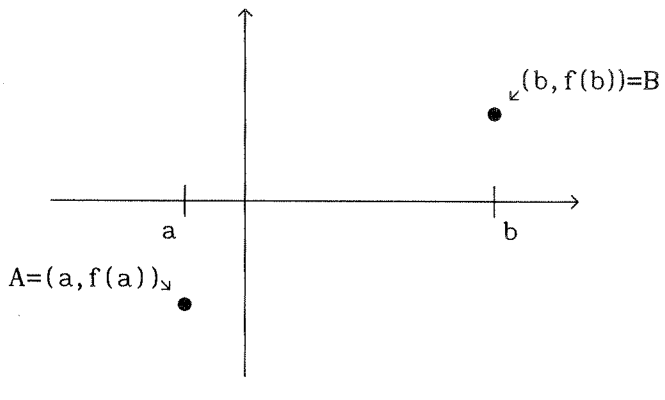
<u>Osservazione 2</u> Se $\exists\ \delta > 0$ t.c. $]x_0-\delta, x_0+\delta[\ \subseteq A$, vale a dire se x_0 è un punto interno ad A , evidentemente x_0 è un punto di accumulazione per A sia da destra che da sinistra.□

<u>Esercizio 1</u> Notare che 1 non è punto di accumulazione da destra per $[0,1]$ e fornire un esempio di funzione derivabile in 1 , per la quale 1 è un punto di massimo locale, senza però che sia $f'(1) = 0$.□

9. Il teorema fondamentale del calcolo differenziale

Siamo arrivati evidentemente a un punto importante. Si tratta di provare il teorema di Lagrange. Come avviene spesso (non sempre) per i grandi teoremi, esso traduce un'idea molto semplice.

L'idea è questa. Se parto con l'auto da Genova e dopo un'ora ho percorso 90 Km , ci sarà stato almeno un momento in cui il tachimetro segnava esattamente 90 Km/h . Detto altrimenti, se nell'intervallo di tempo $[t_1,t_2]$ la velocità media è $\bar{v}$, ci deve essere almeno un istante t in cui la velocità <u>istantanea</u> è proprio uguale alla velocità media $\bar{v}$. La ragione è ovvia: se la velocità istantanea fosse sempre minore di $\bar{v}$, la velocità media non potrebbe essere $\bar{v}$! Ugualmente la velocità istantanea non può essere sempre maggiore, e quindi... Conoscendo il parallelo che c'è tra velocità media/istantanea e retta tangente/secante, non ci si stupirà se c'è una interpretazione grafica analoga alle precedenti considerazioni cinematiche. Comunque si provi a disegnare il grafico di una funzione (derivabile) che congiunge i due punti A e B , ci sarà un punto nell'intervallo $[a,b]$ in cui la pendenza della retta tangente è uguale alla pendenza della retta secante passante per A e B . Invito chi legge a provare davvero a disegnare qualche grafico, per una concreta verifica.



Come si fa a dimostrare il teorema di Lagrange, che esprime in modo preciso queste "intuizioni"? La strada tradizionale consiste nel provare dapprima un caso particolare, detto teorema di Rolle. Nel disegno, se la retta passante per i due punti A e B fosse orizzontale, allora ci sarebbe un punto in $[a,b]$ in cui la retta tangente alla funzione è anch'essa orizzontale. Vale a dire, ci sarebbe un punto in cui la derivata prima è uguale a zero.

<u>Teorema 1</u> (di Rolle) Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$. Se $f(a) = f(b)$, allora $\exists\ \xi \in]a,b[$ t.c. $f'(\xi) = 0$.□

<u>Dimostrazione</u> Poiché f è continua in $[a,b]$, il teorema di Weierstrass ci permette di affermare che f ha massimo e minimo su $[a,b]$. Sia m il minimo e M il massimo. Se per caso $m = M$, allora da $m \leq f(x) \leq M \quad \forall\ x \in [a,b]$, si deduce che f è costante su $[a,b]$ e quindi di punti $\xi \in]a,b[$ t.c. $f'(\xi) = 0$ ne troviamo a bizzeffe.

Se $m < M$, allora ci sarà almeno un punto di minimo o di massimo <u>interno</u> ad $[a,b]$. Infatti, se così non fosse, detto x_m un punto di minimo ed x_M un punto di massimo, essi sarebbero obbligatoriamente punti estremi dell'intervallo. Ma allora $f(x_m) = m = M = f(x_M)$, in quanto f assume uguali valori negli estremi dell'intervallo, in contrasto con l'ipotesi che sia $m < M$. Sia allora $\xi \in]a,b[$ un punto di massimo o di minimo interno ad $[a,b]$, la cui esistenza abbiamo garantito. Ovviamente esso, essendo un punto di massimo o di minimo assoluto, è anche un punto di massimo o di minimo locale: essendo interno ad $[a,b]$, possiamo affermare che $f'(\xi) = 0$, grazie al teorema 8.1.□

Come si può vedere, la dimostrazione del teorema di Rolle non è particolarmente complessa. Non va dimenticato, però, che essa utilizza il teorema di Weierstrass. Quindi la dimostrazione che abbiamo usato richiede la proprietà di completezza. Inoltre si tratta di una dimostrazione non costruttiva in quanto fa uso del teorema di Weierstrass la cui dimostrazione non è costruttiva. Si badi bene che le precedenti affermazioni <u>non</u> dicono che per il teorema di Rolle occorre l'assioma di completezza o che non sia possibile darne una dimostrazione costruttiva. Tanto è vero che di queste due ultime affermazioni la prima è vera mentre la seconda è falsa. Si può fare un esempio di funzione $f:A \longrightarrow \mathbb{Q}$, con $A \subseteq \mathbb{Q}$, che soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle[11] senza che però vi sia un punto in cui la derivata prima è zero: questo prova che senza l'assioma di completezza (più precisamente: solo con gli assiomi 1÷15) non possiamo dimostrare questo teorema. Si può invece dare una diversa dimostrazione, costruttiva, del teorema di Rolle.

Passiamo al teorema di Lagrange

---

[11] Modificato in modo ovvio per tenere conto del fatto che siamo in $\mathbb{Q}$ e non in $\mathbb{R}$.

Teorema 2 (di Lagrange, o teorema fondamentale del calcolo differenziale) Sia Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$. Allora $\exists$ $\xi \in]a,b[$ t.c. $f(b)-f(a) = f'(\xi)\cdot(b-a)$.□

Dimostrazione Rinvio al C-S. Poiché però su questo testo il teorema di Lagrange è provato come conseguenza del teorema di Cauchy, faccio notare che c'è un semplice trucco per ricavare il teorema di Lagrange dal teorema di Rolle. L'idea è ovvia: modifichiamo f aggiungendo $m\cdot x$ ad $f(x)$, scegliendo m opportunamente di modo che la funzione $g(x) = f(x)+m\cdot x$ soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle, ed il gioco è fatto.□

Una estensione del teorema di Lagrange è il teorema di Cauchy. Esso dice (sotto opportune ipotesi) che $\exists$ $\xi \in]a,b[$ t.c. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Rinvio al C-S per enunciato e dimostrazione. Preferisco osservare che esso costituisce una estensione non triviale del teorema di Lagrange, anche se per dimostrarlo basta un semplice trucco. Vediamo quindi come esso dica effettivamente di più del teorema di Lagrange. Se applicassimo Lagrange a f e a g, otterremmo che $\exists$ ξ_1 t.c. $f(b)-f(a) = f'(\xi_1)\cdot(b-a)$ e che $\exists$ ξ_2 t.c. $g(b)-g(a) = g'(\xi_2)\cdot(b-a)$. Da cui: $\dfrac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Come si vede, direttamente dal teorema di Lagrange si può ottenere una formula simile ma con una importante differenza: nel teorema di Cauchy il punto ξ è uno solo, lo stesso sia per f che per g .

Si può dare anche per il teorema di Cauchy una interpretazione cinematica. Se un'auto percorre 120 Km in un'ora ed un'altra 60 , cioè se il rapporto tra le due velocità medie è pari a 2 , allora ci sarà un istante (ξ) in cui il rapporto tra le velocità istantanee è anch'esso pari a 2 . Ci sarà anche un istante ξ_1 in cui la velocità della prima auto è di 120 Km/h e un istante ξ_2 in cui la velocità istantanea della seconda macchina sarà pari a 60 Km/h. Si noti però che questi istanti possono essere tutti diversi tra loro: anzi, provare a fare un esempio in cui si veda che sono effettivamente tutti distinti.

Più significative del teorema di Cauchy, che è un risultato per così dire "tecnico", sono alcune conseguenze del teorema di Lagrange.

Il primo risultato è il

Teorema 3 Sia $f:I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f continua su I . Supponiamo che per ogni x_o interno ad I , f sia derivabile in x_o con $f'(x_o) = 0$.

Allora f è costante su I .□

Dimostrazione Ricordo che dire che f è costante significa:

(★) $\exists\ k \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall\ x \in I$ si ha $f(x) = k$.

Ciò è equivalente a:

(☆) $\forall\ x_1, x_2 \in I\ \ f(x_1) = f(x_2)$.

Che (★) implichi (☆) è ovvio. Per il viceversa, sia $x_1 \in I$: prenderemo $k = f(x_1)$. Allora abbiamo che $f(x_2) = k$ $\forall\ x_2 \in I$, cioè proprio quanto affermato in (★).

Evidentemente ho introdotto la condizione (☆) perché dimostrerò che f è costante proprio provando che vale (☆).

Siano allora $x_1, x_2 \in I$. Applico il teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$ (se $x_1 < x_2$, sennò[12] considero l'intervallo $[x_2, x_1]$). Posso applicarlo, perché f è certamente continua su $[x_1, x_2]$ ed è anche derivabile in $]x_1, x_2[$, in quanto tutti i punti di questo intervallo sono interni ad $]x_1, x_2[$ e quindi, a fortiori, ad I . Allora $\exists\ \xi \in]x_1, x_2[$ t.c. $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$. Ma $f'(\xi) = 0$, quindi $f(x_2) = f(x_1)$.□

Si ottiene subito il seguente:

Corollario 1 Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile in ogni $x_o \in I$, con $f'(x_o) = 0$. Allora f è costante su I .□

Dimostrazione Basta osservare che, negli eventuali estremi di I , f è derivabile e pertanto continua, per cui si ricade nelle ipotesi del teorema 3.□

Credo che gli enunciati del teorema 3 e del suo corollario meritino un po' di commenti.

Tanto per cominciare, più spesso si applica il corollario. In effetti, succede una cosa strana: sono la stessa cosa... Voglio cioè dire che, se sono soddisfatte le ipotesi del teorema 3, allora f è costante su I e quindi soddisfa anche le ipotesi del corollario. Sia ben chiaro, però, che questo nulla toglie all'importanza del teorema 3: può benissimo capitare che a priori uno non sappia se la funzione data è derivabile negli estremi e quindi il corollario non possa essere utilizzato.

L'altro commento da fare è che nel teorema 3 non possiamo eliminare la ipotesi di continuità agli estremi.

[12] Se $x_1 = x_2$, non c'è niente da dimostrare, ovviamente!

<u>Esempio</u> <u>1</u> $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x \in \,]0,1[\\ 1 & \text{per} \quad x = 0,1 \end{cases}$.□

Il commento più importante però è che è assolutamente essenziale per la validità del teorema 3 che I sia un intervallo.

<u>Esercizio</u> <u>1</u> Scovare dove è stato usato, nella dimostrazione del teorema 3, il fatto che I sia un intervallo.□

Se l'insieme su cui è definita f non è un intervallo, può succedere quanto segue:

<u>Esempio</u> <u>2</u> Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$. f è derivabile su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, cioè sul suo insieme di definizione, ed è $f'(x) = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, però f non è costante. Infatti assume due valori distinti.□

Vorrei far notare che i commenti relativi al teorema 3 si applicano anche al seguente teorema 4, anch'esso conseguenza del teorema di Lagrange.

<u>Teorema</u> <u>4</u> Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f continua su I . Supponiamo che per ogni x_o interno ad I , f sia derivabile in x_o con $f'(x_o) \geq 0$ (rispettivamente: $\leq, >, <$). Allora f è debolmente crescente (rispettivamente: debolmente decrescente, strettamente crescente, strettamente decrescente) su I .□

<u>Dimostrazione</u> Solo nel caso del "$\geq$" .

Siano $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$. Si applica il teorema di Lagrange ad $[x_1, x_2]$. E si ha: $f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)\cdot(x_2-x_1)$, ma $f'(\xi) \geq 0$ e quindi $f(x_2) \geq f(x_1)$.□

<u>Esercizio</u> <u>2</u> Dare l'enunciato di un corollario che stia al teorema 4 come il corollario 1 sta al teorema 3.□

Che commento fare a questo teorema? Abbiamo trovato quel che ci mancava prima, nel § 7. Cioè, abbiamo finalmente uno strumento che ci permette di passare da informazioni sul segno della derivata a informazioni sulla monotonia della funzione. Attenzione, però. Il teorema 7.1 è un teorema di carattere <u>locale</u>, cioè coinvolge solo informazioni sulla funzione in un intorno di x_o (in effetti, per il teorema 7.1 basta solo che f sia debolmente crescente in un intorno di x_o , come è detto nella osservazione 7.1) Invece il teorema 4 è un teorema di carattere globale. Cioè, non ci basta sapere che $f'(x_0) \geq 0$ (e neanche $f'(x_0) > 0$): d'altronde era già stato visto a suo tempo che il teorema della permanenza del segno non bastava per ottenere la monotonia di f ; abbiamo bisogno di sapere che è $f'(x) \geq 0$ su un insieme I per ottenere la monotonia. Per di più, questo insieme deve avere una struttura particolare, cioè deve essere un intervallo.

A questo proposito, vorrei notare che siamo di fronte ad un leitmotiv tipico delle conseguenze del teorema di Lagrange. Se uno si dimentica l'essenziale requisito di essere su un intervallo, ottiene risultati come questo:

Esempio 3 Sia $f(x) = tg(x)$. La funzione tangente è definita su $A = \mathbb{R} \setminus \{ x \in \mathbb{R} : \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } x = (\pi/2)+k\pi \}$. E' noto che f è derivabile su A e che $f'(x) = 1+tg^2(x) \quad \forall\ x \in A$. Quindi $f'(x) > 0 \quad \forall\ x \in A$. Ma la funzione tangente non si sogna minimamente di essere strettamente crescente sul suo insieme di definizione. Se qualcuno la pensa diversamente, è bruscamente invitato a rileggersi la definizione di funzione strettamente crescente.□

10. I teoremi di de l'Hôpital

Questo paragrafo sarà breve in quanto rinvierò per gli enunciati e le dimostrazioni dei teoremi al C-S.

Mi limito solo a qualche breve considerazione.

Essenzialmente il teorema di de l'Hôpital mette in relazione $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ con $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Quando e perché ci dobbiamo aspettare una relazione tra questi due limiti? Facciamo un esempio cinematico, cioè supponiamo che x rappresenti il tempo ed $f(x)$ e $g(x)$ la posizione all'istante x di due automobili che si muovono su una strada rettilinea. Se all'istante x_0 le due auto si trovavano entrambe al chilometro "zero", allora il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ non dovrebbe essere molto diverso dal rapporto $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, almeno per x non troppo discosto da x_0. Infatti, se la prima macchina parte con una velocità che è pari a k volte la velocità con cui parte la seconda, anche la distanza tra la prima macchina e la linea di partenza sarà pari a k volte la distanza tra la seconda auto e la linea di partenza (almeno per i "primi istanti").

C'è un altro modo per immaginare come mai possa esserci un rapporto tra $\frac{f(x)}{g(x)}$ e $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Supponiamo che f e g siano derivabili in x_0 e che sia $g'(x_0) \neq 0$. Supponiamo ancora che sia $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (questa ipotesi non è particolarmente restrittiva: la faccio più che altro per evitare di appesantire l'argomentazione con questioni inessenziali). Allora abbiamo che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \cdot \frac{x-x_0}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \frac{x-x_0}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} .$$

Se supponiamo inoltre che le due funzioni derivate prime f' e g' siano continue in x_0, abbiamo che $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$ e analogamente per la g': pertanto possiamo dire che $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Abbiamo cioè in conclusione che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Si noti che per la derivabilità di f e g abbiamo che f e g sono continue e quindi $\lim_{x \to x_0} f(x)-f(x_0) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x)-g(x_0) =$

$= 0$. Cosa abbiamo ottenuto di interessante? Avevamo $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ che, come abbiamo appena visto, è una forma indeterminata e abbiamo visto come esso sia uguale a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Nelle ipotesi oltremodo forti che abbiamo (continuità di f' e di g' , nonché $g'(x_0) \neq 0$), ciò ci permette addirittura di "determinare" la forma indeterminata, in quanto abbiamo anche che $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$; l'importanza dei teoremi di de l'Hôpital è che essi permettono di asserire l'equivalenza tra $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ in ipotesi meno severe. In particolare, sarà irrilevante il fatto che sia $\lim\limits_{x \to x_0} g'(x) = g'(x_0) = 0$: questo è di estrema importanza in quanto consentirà di applicare più volte il teorema di de l'Hôpital, e quindi serbare la speranza che derivando e derivando si riesca ad avere che il denominatore abbia messo giudizio e si sia rassegnato ad avere un limite diverso da zero.

Come detto all'inizio del paragrafo, per enunciati e dimostrazioni rinvio a C-S.

11. Le derivate successive

Sia data $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Prendiamo l'insieme dei punti in cui f è derivabile e chiamiamolo A_1 . Come abbiamo già notato nel §2, se ad ogni punto $x \in A_1$ associamo il numero reale $f'(x)$, otteniamo una nuova funzione reale di variabile reale, definita su A_1 , che indichiamo con f' e che chiamiamo funzione derivata prima di f .

Abbiamo quindi $f' : A_1 \longrightarrow \mathbb{R}$. Questa è una funzione reale di variabile reale. Da un punto di vista astratto, formale, nessuno ci può impedire di rifare con f' tutto quello che già avevamo fatto per la funzione reale di variabile reale f . E quindi di vedere se, per esempio, f' sia derivabile in un punto $x_0 \in A_1$ il quale sia anche di accumulazione per A_1 . Se così è, cioè se $\exists$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \mathbb{R}$, avremo che f' è derivabile in x_0 . Ma ci interessa di più continuare a fare riferimento ad f : diremo pertanto, per ragioni che mi sembrano ovvie, che f è derivabile due volte in x_0 . E indicheremo ℓ con $f''(x_0)$ (notazione sensata: dopotutto si tratta di $(f')'(x_0)$).

Possiamo ancora andare avanti. E cioè considerare la funzione derivata seconda $f'':A_2: \longrightarrow \mathbb{R}$, dove A_2 è evidentemente l'insieme dei punti di A_1 nei quali la funzione derivata prima, f' , è derivabile a sua volta. Da qui, si avrà $f'''(x_0)$, etc., etc.

Ha qualche interesse questo gioco formale? Sì. Eccome, se ne ha. Vediamo, un po' alla rinfusa, alcune buone ragioni per prendere sul serio le derivate seconde, terze, etc. Tanto per cominciare, probabilmente tutti sanno che in cinematica la derivata prima rappresenta la velocità, mentre la derivata seconda ci dà l'accelerazione. Le derivate prime, seconde e terze hanno dei riscontri di carattere grafico, visivamente percepibili (crescenza, convessità, flessi sono parole in parte note e che comunque impareremo a conoscere più in là, nel § 13). Ma il significato "applicativo" non si limita alle prime due o tre derivate. Per esempio, nello studio della flessione di travi soggette a sforzo, è di fondamentale importanza una equazione che coinvolge la derivata quarta della funzione la quale descrive lo scostamento della trave dalla posizione di "riposo". Vi sono poi delle ulteriori ragioni, che si vedranno nel paragrafo successivo, che rendono utile considerare derivate di ordine anche molto alto.

Detto questo, vorrei però anche soffermarmi brevemente su un aspetto di carattere più astratto-formale. E cioè vorrei osservare che gli insiemi A_1 , A_2 , etc. possono anche essere molto "complicati", in generale. In pratica, però, quasi sempre si usano degli intervalli o unioni di un numero finito o infinito di intervalli[13] Avranno quindi quasi sempre una struttura molto semplice. Non voglio nascondere il fatto che ciò rende discutibile la mia scelta di voler affrontare la derivabilità (e la continuità e i limiti) in un contesto di carattere più generale rispetto al C-S. In effetti, quasi sempre gli insiemi di definizione delle funzioni che "capitano tra i piedi" hanno una struttura semplice come quella descritta sopra (intervalli o unione di intervalli): quindi il guadagno ottenuto in generalità, rispetto al C-S, parlando di punti di accumulazione è assai modesto. L'ho fatto comunque perché ritengo che non sia modesto invece dal punto di vista concettuale (e a volte si lavora più facilmente in un contesto di carattere più generale che non in un caso particolare).

12. La formula di Taylor

I risultati di questo paragrafo sono straordinariamente utili ai fini dell'applicazione dell'analisi. Forniscono infatti nuovi strumenti per il "calcolo

[13] Ricordo sempre che gli intervalli sono intesi non degeneri. Sennò, dato che tra gli intervalli degeneri ci sono anche i "singleton", ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ lo potrei vedere evidentemente come unione di un numero infinito di intervalli!

dei limiti", danno condizioni necessarie e condizioni sufficienti per i massimi e minimi locali, permettono di effettuare valutazioni approssimate dei valori assunti da funzioni anche "complicate".

Dietro a tutto questo sta la formula di Taylor. Ci si arriva insistendo testardamente con l'idea che stava già dietro alla definizione di differenziabilità. Chi legge dovrebbe ricordarsi che cercavamo di approssimare una funzione con un'altra "più semplice". Più precisamente, cercavamo di trovare, fra tutti i polinomi di primo grado, quello il cui grafico si accostasse meglio al grafico della funzione data, almeno vicino al punto $(x_0,f(x_0))$.

La scelta dei polinomi di primo grado era motivata da un'ovvia considerazione di semplicità: stavamo cercando qualcosa da sostituire alla funzione data, in modo da rendere il più possibile agevoli i conti da fare. Ora, questo va bene fino a un certo punto. Può benissimo darsi che uno sia disponibile a prendere in considerazione funzioni approssimanti <u>più complicate</u> che non i polinomi di primo grado, se può però ottenere una <u>migliore approssimazione</u>. Per esempio, potremmo pensare di usare polinomi di 2° grado (che, dopotutto, sono ancora abbastanza maneggevoli) per ottenere una approssimazione migliore. Più precisamente, tenendo conto di quanto visto a proposito della differenziabilità, possiamo pensare di cercare un polinomio g di 2° grado t.c. $f(x)-g(x)$ sia minore di quanto non lo fosse $f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)]$. E' chiaro che <u>solo se</u> si ottiene veramente una approssimazione migliore vale la pena di passare dai polinomi di 1° grado a quelli di 2°. Effettivamente le cose stanno così. Anzi, in generale si ottiene una approssimazione che migliora via via di più ogni qual volta si aumenta il grado del polinomio approssimante: tutto ciò, però, purché la funzione data sia derivabile un numero conveniente di volte. Si ha addirittura una regola di questo genere: se una funzione è derivabile n volte, è vero che aumentando il grado del polinomio migliora l'approssimazione, ma solo fino al grado n . E' inutile spingersi oltre.

Ci sono molte altre considerazioni da fare a proposito della formula di Taylor, ma mi sembra più furbo farle <u>dopo</u> aver visto come stanno veramente le cose da un punto di vista formale. Vediamo quindi subito il primo risultato, che costituisce una diretta generalizzazione delle considerazioni fatte a proposito della differenziabilità.

<u>Teorema 1</u> (formula di Taylor con resto nella forma di Peano) Sia data $f:I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$. Supponiamo f sia derivabile $n-1$ volte in I e derivabile n volte in x_0 . Allora, per ogni $x \in I$ si ha:

$$f(x) = f(x_o)+f'(x_o)\cdot(x-x_o)+f''(x_o)\cdot\frac{(x-x_o)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(x_o)\cdot\frac{(x-x_o)^n}{n!}+\omega_n(x)\cdot(x-x_o)^n \quad ,$$

dove $\omega_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfa le condizioni $\lim\limits_{x\to x_o} \omega_n(x) = \omega_n(x_o) = 0$.□

Dimostrazione vedi C-S.□

Vi è però anche un'altra strada che conduce ad un'altra versione della formula di Taylor. Si tratta di portare avanti, di generalizzare, l'idea che sta dietro il teorema di Lagrange, seguendo lo stesso itinerario che ci ha condotti dalla differenziabilità alla formula di Taylor col resto di Peano: e cioè, banalmente, considerare un polinomio di grado generico n .

Teorema 2 (formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange) Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, $x_o \in I$. Supponiamo f sia derivabile n volte in I , con derivata n-esima continua. Supponiamo inoltre che in ogni punto di $I\setminus\{x_o\}$ f sia derivabile $n+1$ volte. Allora, per ogni $x \in I$ esiste $\xi \in]x_o,x[$ (se $x_o < x$, sennò $\xi \in]x,x_o[$; se $x = x_o$ il tutto ha ben scarso interesse...) t.c.:

$$f(x) = f(x_o)+f'(x_o)\cdot(x-x_o)+\ldots+f^{(n)}(x_o)\cdot\frac{(x-x_o)^n}{n!}+f^{(n+1)}(\xi)\cdot\frac{(x-x_o)^{n+1}}{(n+1)!} \quad .□$$

Dimostrazione vedi C-S.□

Quel che bisogna assolutamente capire è che le due formule di Taylor servono per scopi del tutto distinti tra loro.

La formula di Taylor col resto di Peano ci permette di ricavare dei risultati di carattere locale relativamente ad x_o . Per esempio, ci consente di calcolare dei limiti, oppure ci offrirà condizioni necessarie e condizioni sufficienti per massimi e minimi locali. Essa, tuttavia, non ci dice nulla sul valore che f assume in uno specifico punto $\bar{x}$ dato. Infatti abbiamo $f(\bar{x}) = f(x_o)+$ $+f'(x_o)\cdot(\bar{x}-x_o)+\ldots+f^{(n)}(x_o)\cdot\frac{(\bar{x}-x_o)^n}{n!}+\omega_n(\bar{x})\cdot(\bar{x}-x_o)^n$: ebbene, noi non sappiamo assolutamente nulla su $\omega_n(\bar{x})$ [14]. Quindi, se $x_o = 0$ e voglio sapere quanto fa f in $\bar{x} = 0.1$, non posso fare alcun affidamento sulla formula di Taylor con il

[14] Salvo il fatto, ovviamente, che :

$$\omega_n(\bar{x}) = \left(f(\bar{x})-[f(x_o)+f'(x_o)\cdot(\bar{x}-x_o)+\ldots+f^{(n)}(x_o)\cdot\frac{(\bar{x}-x_o)^n}{n!}]\right)/(\bar{x}-x_o)^n \quad .$$

Da cui si vede che, se conosciamo $f(\bar{x})$, possiamo sapere quanto vale $\omega_n(\bar{x})$: ma il nostro problema era proprio quello di saper il valore di $f(\bar{x})$.

resto di Peano.

Completamente diverso è il discorso per la versione con il resto di Lagrange. Ho infatti $f(\bar{x}) = f(x_o) + f'(x_o) \cdot (\bar{x} - x_o) + \ldots + f^{(n)}(x_o) \cdot \dfrac{(\bar{x}-x_o)^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi) \cdot \dfrac{(\bar{x}-x_o)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Non bisogna farsi ingannare dalle apparenze. E' vero che <u>non</u> <u>so</u> <u>assolutamente</u> <u>chi</u> <u>sia</u> ξ . Però ho <u>una</u> <u>informazione</u> su ξ ! So che $\xi \in]x_o, \bar{x}[$ [15] . Se riesco a trovare $M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad \forall \; x \in]x_o, \bar{x}[$, questo mi garantisce che è <u>anche</u> $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M$: da qui ottengo una <u>stima</u> dell'<u>errore</u> commesso se ad f sostituiamo il polinomio di Taylor di ordine n . Cioè:

$$|f(\bar{x}) - [f(x_o) + f'(x_o) \cdot (\bar{x} - x_o) + \ldots + f^{(n)}(x_o) \cdot \frac{(\bar{x}-x_o)^n}{n!}]| \leq M \cdot \frac{|\bar{x}-x_o|^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Quindi occorrerà sincerarsi che sia $M \cdot \dfrac{|\bar{x}-x_o|^{n+1}}{(n+1)!} < E$, dove E è l'errore assoluto che non vogliamo superare, per poter dire che la stima ottenuta è utile.

[15] Se $x_o < \bar{x}$, altrimenti $\xi \in]\bar{x}, x_o[$: è il solito guaio con le notazioni che si usano per gli intervalli, che obbliga ogni volta a fare queste frustranti precisazioni

13. "Disegnare il grafico di f "

Vorrei fare alcune considerazioni relative a quella idea piuttosto sfuggente cui si fa riferimento quando si parla di disegnare il grafico di una funzione.

Evidentemente si vuole fare riferimento al problema di rappresentare su un foglio di carta (o altro supporto: lavagna, monitor, lastra di acciaio, etc.) "qualcosa" che assomigli il più possibile al grafico di f .

Vorrà dire che sul nostro foglio di carta avremo posto un sistema di coordinate e che cercheremo di fare un disegno che rappresenti in maniera adeguata il grafico di f nel dato sistema di coordinate.

E' chiaro che, se uno vuole un buon risultato quantitativo e qualitativo, un'idea è di disegnare un grafico "per punti" scegliendo punti "molto vicini" tra loro. In effetti questo è quello che si fa praticamente sempre quando questo compito è fattibile tenendo conto della difficoltà di calcolare $f(x)$ e degli strumenti di calcolo a disposizione per fare questi calcoli. Oggi, grazie alla microelettronica, è ora possibile avere a disposizione una grande capacità di calcolo[16]: è del tutto realistico disegnare il grafico, per esempio, di $f(x) = e^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}} \cdot (|\mathrm{sen}(x)|+1)^{x+\sqrt[3]{x}}$ con $x \in [0,100]$ calcolando f in $x_k = k \cdot 10^{-3}$, per $k = 0,1,\dots,10^5$. E' abbastanza evidente che in questo modo si ottiene una rappresentazione del grafico di f piuttosto fedele (non solo: ma è in genere anche facile eventualmente variare intervalli, scala, finezza della suddivisione, etc., qualora interessassero particolari che non si è riusciti a mettere subito in chiara luce).

A cosa serve allora tutto il macchinario sulla ricerca di crescenza, decrescenza, concavità, flessi, massimi, asintoti, etc.? Possiamo dire tranquillamente che serve a ben poco. Naturalmente la terminologia, le definizioni e i teoremi chiave che riguardano i termini sopra citati sono importanti. Non solo: spesso può essere utile fare una accurata verifica di proprietà che sembrano essere presenti nel disegno. Di più: senza una buona padronanza di questi concetti (che corrispondono a proprietà molto significative nelle applicazioni) si rischia di non saper interpretare ciò che il calcolatore (o calcolatrice) sforna, di non essere cioè in grado di fare una buona lettura dell'output ottenuto. Quello che è

[16] In realtà, dipende anche da dove si vive: nel "Sud" del mondo, questa "capacità di calcolo" è ancora poco diffusa.

meno importante è una sofisticata padronanza dei metodi di calcolo utili a trovare per via analitica la presenza di flessi, estremi relativi, intervalli di crescenza, etc. E' un po' lo stesso discorso che vale per le tecniche di derivazione: a cosa serve saper fare le derivate se i programmi di calcolo simbolico richiedono solo di scrivere l'espressione di f e poi di premere un tasto per ottenere l'espressione di f' ? E' quindi importante curare di più la comprensione effettiva dei concetti e dei teoremi (l'ambito delle ipotesi, in particolare) che non una capacità di calcolo sofisticata (naturalmente, se uno è anche bravo a fare i conti, tanto meglio).

Pertanto, l'utilità di saper "disegnare il grafico" di una funzione, cioè di sapere trovare massimi e minimi, crescenza, flessi, etc., è più che altro da vedersi quale una sorta di "esercizio di riepilogo", che richiede per la soluzione di sapere utilizzare opportunamente i vari strumenti del calcolo differenziale. L'obbiettivo è quindi rovesciato: non bisogna imparare i teoremi del calcolo differenziale per disegnare dei bei grafici, ma viceversa il problema di disegnare grafici va visto come una utile palestra per allenarsi nella comprensione e collegamento dei principali risultati e concetti del calcolo differenziale.

Va anche detto che, tradizionalmente, quando si chiede di "disegnare il grafico di f " (nel senso di tracciare una buona approssimazione del grafico di f mediante i risultati del calcolo differenziale) viene privilegiato oltre misura l'aspetto per così dire "qualitativo". E ciò può anche portare a distorsioni nel disegno rispetto ad una accurata tabulazione ottenuta con l'ausilio di un efficiente mezzo di calcolo. Come conferma e delucidazione di quanto ho appena detto, invito lo studente a considerare attentamente il seguente esercizio. Per la definizione di flesso, chi non la conosce può vedere la successiva definizione 1.

<u>Esercizio 1</u> Disegnare il grafico di $f(x) = |x+1| \cdot e^{-(1/x)}$ su $]0,+\infty[$, mettendo in rilievo la presenza di un punto di flesso. Confrontare il disegno ottenuto con un grafico ottenuto da calcolatore[17] .Riflettere sull'evidenza "grafica" o meno di tale punto di flesso. Cercare di capire cosa significhi un punto di flesso così poco "appariscente".□

<u>Esercizio 2</u> Simile al precedente. Osservare che $f(x) = x^4-2\cdot 10^{-50}\cdot x^2$ ha tre

[17] In ogni caso un grafico da calcolatore per f lo si trova alla fine del capitolo.

punti di estremo locale e che in particolare il punto 0 è punto di massimo locale. Confrontare questi risultati con un grafico ottenuto da calcolatore. Riflettere.□

Vorrei comunque dare un paio di definizioni relative ad elementi di rilievo per i grafici di funzioni, perché spesso attorno a tali caratteristiche vi è confusione.

Definizione 1 Sia $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 interno ad A , f derivabile in x_0 . Diremo che x_0 è un punto di flesso ascendente (rispettivamente: discendente) per f se:

$$\exists\ \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \begin{cases} \forall\ x \in]x_0-\delta, x_0[& f(x) \le f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \\ \forall\ x \in]x_0, x_0+\delta[& f(x) \ge f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \end{cases}$$

$$(\text{rispettivamente:} \quad \begin{cases} \forall\ x \in]x_0-\delta, x_0[& f(x) \ge f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \\ \forall\ x \in]x_0, x_0+\delta[& f(x) \le f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \end{cases}) .\square$$

Osservazione 1 Ho richiesto che x_0 sia un punto interno per A . Sarebbe stato sufficiente richiedere che x_0 fosse di accumulazione per A sia da sinistra che da destra.□

Osservazione 2 Graficamente, dire che x_0 è punto di flesso ascendente significa dire che f a sinistra di x_0 sta sotto la retta tangente in x_0 , mentre a destra sta sopra.□

Osservazione 3 Si noti che, anche se x_0 è punto di flesso ascendente, la funzione f può tranquillamente essere strettamente decrescente. Vedasi per esempio $f(x) = -\text{arctg}(x)$! Quindi attenzione a non farsi trarre in inganno dal significato che le parole usate hanno nel linguaggio comune.□

Osservazione 4 Vedremo nel prossimo paragrafo che un punto di flesso può essere definito in altro modo (non equivalente!). Occorre quindi prestare attenzione a quale definizione viene usata sul libro che si sta leggendo.□

Si può dimostrare (usando la formula di Taylor con il resto di Peano) il seguente:

Teorema 1 Se f soddisfa le ipotesi del teorema 12.1 per $n = 2$, allora CN affinché x_0 sia un punto di flesso è che si abbia $f''(x_0) = 0$. Se f soddisfa le ipotesi del teorema 12.1 con $n = 3$, allora CS affinché x_0 sia punto di flesso è che $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$ (se $f'''(x_0) > 0$, abbiamo un flesso ascendente, se $f'''(x_0) < 0$ il flesso è discendente).□

Un'altra proprietà d'interesse grafico per una funzione è quella di avere asintoti.

<u>Definizione 2</u> Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, diremo che $+\infty$ è "di accumulazione" per A se: $\forall\ \delta > 0\ ,\ A \cap]\delta,+\infty[\ \neq \emptyset$.□

<u>Definizione 3</u> Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, e supponiamo che $+\infty$ sia "di accumulazione" per A. Se $\exists\ k,m \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)-(kx+m)] = 0$, diremo che f ha la retta di equazione $y = kx+m$ come asintoto "a $+\infty$ ".□

<u>Osservazione 5</u> Ovviamente, considerazioni assolutamente identiche possono essere fatte per $x \longrightarrow -\infty$. Il lettore interessato può anche provare a dare una definizione per $x \longrightarrow \infty$.□

<u>Osservazione 6</u> Se $k = 0$, diremo che la retta $y = m$ è un asintoto orizzontale per f (se necessario, si preciserà "a $+\infty$ " se siamo nel caso della definizione 3; "a $-\infty$ " oppure "a ∞ " nei casi indicati nell'osservazione 5). Se $k \neq 0$, parleremo di asintoto obliquo.□

<u>Osservazione 7</u> Anche qui, come nel caso dei flessi ascendenti e discendenti, il linguaggio corrente (in questo caso anche l'etimologia) può indurre in equivoci. Se si riflette sulla definizione di asintoto, si noterà che non è per nulla proibito ad f di "toccare" la retta asintotica. Se il grafico di f è per esempio una retta, allora esso "toccherà" dappertutto l'asintoto! Si consideri poi anche il caso di $f(x) = (\mathrm{sen}(x))/x$.□

<u>Definizione 4</u> Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 di acuumulazione per A. Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, diremo che la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto verticale per f .□

<u>Osservazione 8</u> Ovviamente il grafico di f potrà "toccare" un asintoto verticale al più nel punto x_0 stesso (e ciò si verifica se e solo se $x_0 \in A$, per definizione stessa di funzione).□

Per quanto riguarda gli asintoti obliqui, c'è un semplice trucco per trovarli. Per trovare k, occorre fare $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ e poi per (l'eventuale) m si deve guardare se esiste in $\mathbb{R}$ $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-kx]$. E' lasciato al lettore enunciare un preciso risultato. Si noti che l'esistenza (in $\mathbb{R}$) di $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ <u>non</u> garantisce che vi sia un asintoto obliquo. Vedasi il caso di $f(x) = x+\log(x)$.□

<u>14</u>. <u>Funzioni convesse</u>

Per proprietà e teoremi relativi alle funzioni convesse rinvio senz'altro a C-S.

Vorrei solo fare un po' di considerazioni.

Comincio dall'idea "grafica" della convessità, dalla quale si ottiene la definizione formale. L'idea è che una funzione è convessa se il suo grafico sta sotto ad ogni sua "corda". Ovverossia, presa $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$, e presi due punti $x_1,x_2 \in I$, vogliamo che il segmento congiungente i punti $(x_1,f(x_1))$ ed $(x_2,f(x_2))$ stia "sopra" al grafico di f . E' molto semplice esprimere analiticamente questo fatto. Supponiamo che sia $x_1 < x_2$: basta considerare un punto $x \in [x_1,x_2]$ e richiedere che $f(x) \le r(x)$: qui $r(x)$ è la funzione che ha come grafico la retta passante per i punti $(x_1,f(x_1))$ ed $(x_2,f(x_2))$. L'equazione di tale retta è $y-f(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$. Ovverossia, $r(x) = f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$. Quindi la condizione di convessità è $f(x) \le f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1) \quad \forall\, x \in [x_1,x_2]$.

Forse non si vede immediatamente la connessione tra questa relazione e la definizione usuale di convessità. Ci si può giungere facilmente sfruttando la seguente osservazione: al variare di μ in $[0,1]$, il punto $x_1+\mu\cdot(x_2-x_1)$ descrive l'intervallo $[x_1,x_2]$ (la verifica è ovvia: $x_1 \le x_1+\mu\cdot(x_2-x_1) \le x_2 \Leftrightarrow 0 \le \mu\cdot(x_2-x_1) \le x_2-x_1 \Leftrightarrow 0 \le \mu \le 1$). Allora, dire

$$f(x) \le f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1) \quad \forall\, x \in [x_1,x_2]$$

è equivalente a:

$$f(x_1+\mu\cdot(x_2-x_1)) \le f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot\mu\cdot(x_2-x_1) \quad \forall\, \mu \in [0,1] ,$$

ovverossia:

(▸) $f(x_1+\mu\cdot(x_2-x_1)) \le f(x_1)+\cdot\mu\cdot(f(x_2)-f(x_1)) \quad \forall\ \mu\in[0,1]$.

Questa relazione non è ancora quella che tradizionalmente descrive la convessità, e cioè:

(*) $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \le \lambda\cdot f(x_1)+(1-\lambda)\cdot f(x_2) \quad \forall\ \lambda\in[0,1]$.

Basta però prendere $\lambda = 1-\mu$, osservare che μ varia in $[0,1]$ se e solo se λ varia in $[0,1]$ [18] , e fare i conti con un po' di algebretta.

E' senza dubbio una mia mania, ma a me piace sottolineare come la relazione (▸) sia una espressione più diretta della convessità, ed abbia un pregio rispetto alla più consueta (*): al variare di μ in $[0,1]$, il segmento $[x_1,x_2]$ viene percorso da $x_1+\mu\cdot(x_2-x_1)$ "nel verso giusto" (ad esempio, per $\mu = 0$ otteniamo x_1 , per $\mu = 1$, abbiamo x_2); quando il parametro λ varia tra 0 e 1 , il punto $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ si sposta da x_2 a x_1 .

Detto questo, rinvio a C-S per i risultati più importanti relativi alla convessità.

Mi limito a due parole sulla questione dei flessi, come avevo promesso nella osservazione 13.4.

E' facile provare che, se f è derivabile in x_o ed inoltre $\exists\ \delta > 0$ t.c. f è convessa su $[x_o-\delta,x_o[$ e concava su $]x_o,x_o+\delta[$, allora f ha in x_o un punto di flesso ascendente. In effetti questa è di solito la situazione che si ha in mente quando si parla di flesso (assieme a quella in cui concavo/convesso sono rovesciati, e cioè per i flessi discendenti). Non solo, talvolta sui libri viene data questa come definizione di flesso (vedasi per esempio le dispense di Zolezzi). Occorre allora tenere ben presente che le due definizioni non sono affatto equivalenti. Può cioè capitare che x_o sia un punto di flesso nel senso della mia definizione 13.1, senza però che si possa trovare δ in modo che f sia convessa su $[x_o-\delta,x_o[$ e concava su $]x_o,x_o+\delta[$. E' una situazione simile a quella che si ha con la "crescenza in un punto", per usare la terminologia di C-S: vedasi il § 7. Mi limiterò a mostrare un esempio di questa situazione patologica.

<u>Esempio 1</u> Sia $f(x) = \begin{cases} |x^2\cdot \mathrm{sen}(1/x)| & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -|x^2\cdot \mathrm{sen}(1/x)| & \text{se } x < 0 \end{cases}$ Provare che 0 è un punto di flesso ascendente. Provare che non esiste $\delta > 0$ t.c. f sia convessa su $]-\delta,\delta[$ (suggerimento: studiare il segno di f'').□

[18] Anche se "a rovescio".

15. Conclusioni

Un lettore attento avrà percepito un cambiamento progressivo nel proseguire dei capitoli.

Il grado di dettaglio delle dimostrazioni è andato diminuendo. Inoltre, mentre ho continuato a riservare grande spazio all'introduzione dei concetti nuovi e alla illustrazione dei risultati chiave, ho invece prestato scarsa attenzione ai risultati per così dire secondari. I rinvii a C-S sono diventati in questo caso la norma. Mi pare superfluo dare delle ragioni per questo modo mio di procedere. Ho però voluto menzionare questo fatto per mettere in guardia il lettore: è assolutamente necessario integrare la lettura di questi appunti con il C-S (o altro testo equivalente). Non pensi il lettore di poter avere una immagine compiuta dell'analisi[19] solo da questi appunti: se ne ricava invece una immagine parziale e molto deformata.

Detto questo, passo brevemente in rassegna i punti salienti di questo capitolo. Ovviamente tutto comincia con la definizione di derivata e le ragioni che portano ad introdurre questa idea. Vi sono, poi, come al solito, risultati per la cui dimostrazione non è richiesto l'assioma di completezza (in particolare, i risultati sulla compatibilità tra derivazione da un lato e le operazioni algebriche e "insiemistiche"[20] dall'altro).

Si osservi che il ruolo dell'assioma di completezza diventa sempre più preminente. Non solo esso è essenziale per il teorema fondamentale del calcolo differenziale, o teorema di Lagrange: è anche cruciale in situazioni nelle quali poteva non essere così scontato che lo fosse. Un esempio paradigmatico è dato dalla relazione tra monotonia e derivate: per ottenere informazioni utili, significative, sulla monotonia di una funzione a partire dal segno della derivata prima, abbiamo bisogno del teorema di Lagrange (vedasi teorema 9.4). Ancor di più! Per ottenere un risultato che può sembrare banale da dimostrare, e cioè che se una funzione ha sempre la derivata nulla allora è costante, abbiamo dovuto metterci su un intervallo e abbiamo avuto bisogno del teorema di Lagrange (e quindi della completezza). Chi abbia voglia di dedicare un po' di tempo aggiuntivo, diciamo un

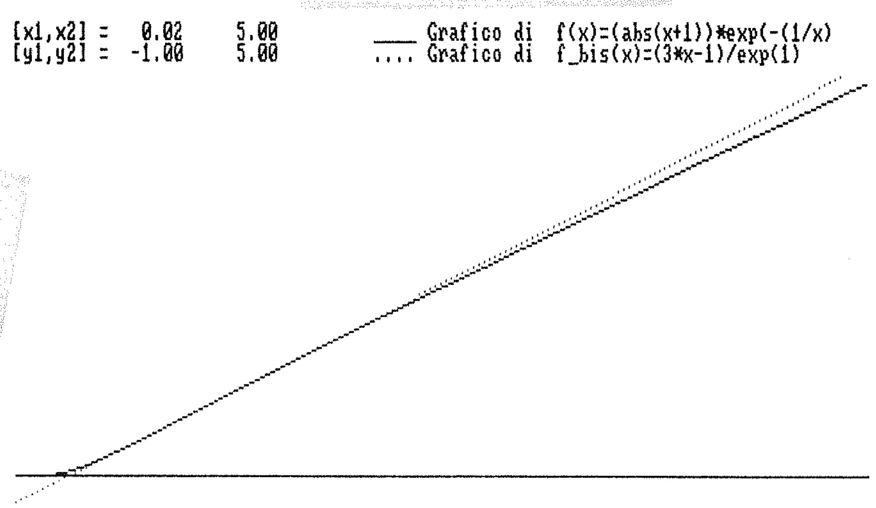
---

[19] Neanche dei risultati elementari nel semplice contesto delle funzioni reali di una sola variabile reale!

[20] Penso all'inversione e composizione di funzioni.

paio di ore, a questa questione, è invitato a cercare di ottenere una dimostrazione diretta del fatto che " $f' = 0 \Rightarrow f$ costante", senza usare il teorema di Lagrange.

Mi pare opportuno sottolineare come questo capitolo offra, nettamente più dei precedenti, risultati interessanti per una accurata descrizione di proprietà significative delle funzioni (come si trovano massimi e minimi, flessi, l'idea di convessità). Offre, infine, anche un risultato di grande valore per la approssimazione delle funzioni: la formula di Taylor ci dà infatti la possibilità di sostituire ad una funzione "complicata" un polinomio, avendo una stima dell'errore che si commette[21].



[21] Va da sé che, senza avere una stima dell'errore, dire che qualcosa approssima qualcos'altro, è una espressione verbale priva di significato reale.